"Θεμελιώδες Εννοιες Μαθηματικών" No. Date 18/12/18

Λήμμα:

α) Για κάθε ε με $0<\varepsilon<1$ και για $\forall n\in\mathbb{N}$ ισχύει
$(1+\varepsilon)^n < 1+3^n\varepsilon$.

β) Για κάθε $\theta>1$ και $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε
$(1+\varepsilon)^n<\theta$.

Απόδειξη

Πρώτο επαγωγικό βήμα

α) Με επαγωγή, για $n=1$ η ανισότητα γράφεται $1+\varepsilon<1+3\varepsilon$
που ισχύει διότι $\varepsilon>0$.

Γενικό επαγωγικό βήμα

Υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για n δηλ. ότι
$(1+\varepsilon)^n < 1+3^n\varepsilon$ (1)

Θέλουμε νδο $(1+\varepsilon)^{n+1} < 1+3^{n+1}\cdot\varepsilon$ (2)

$$(1) \Rightarrow (1+\varepsilon)^{n+1} < (1+3^n\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1+\varepsilon+3^n\varepsilon+3^n\cdot\varepsilon^2 =$$
$$= 1+\varepsilon(1+3^n+3^n\varepsilon) < 1+\varepsilon(3^n+3^n+3^n) = 1+\varepsilon 3^{n+1}$$

άρα ισχύει η ανισότητα για $n+1$
Επομένως (από μαθηματική επαγωγή) ισχύει $\forall n\in\mathbb{N}$.

β) Έστω $\theta>1$ και $n\in\mathbb{N}$
Αν βρούμε $\varepsilon>0$ ώστε $1+3^n\cdot\varepsilon<\theta$
τότε $(1+\varepsilon)^n < 1+3^n\cdot\varepsilon<\theta$
Παρατηρούμε ότι $1+3^n\cdot\varepsilon<\theta \Leftrightarrow \varepsilon< \dfrac{\theta-1}{3^n}$

Έτσι επιλέγοντας ε με $0<\varepsilon<\min\left\{1, \frac{\theta-1}{3^n}\right\}$ έχουμε

$0<\varepsilon<1$ και $1+3^n\varepsilon<\theta$

άρα $(1+\varepsilon)^n<\theta$.

Θεώρημα:

Για κάθε $a\in\mathbb{R}$ με $a\geq 0$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικός $x\geq 0$ ώστε $x^n=a$

Απόδειξη:

Μοναδικότητα: Αν $0\leq x<y$ τότε $x^n<y^n$ και άρα δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα $x^n=a$ και $y^n=a$

Ύπαρξη: Αν $n=1$ θέτουμε $x=a$ οπότε υποθέτουμε $n\geq 2$

Αν $a=0$ θέτουμε $x=0$

Αν $a=1$ θέτουμε $x=1$

Άρα, απομένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $a>1$ και $0<a<1$.

1η περίπτωση: $a>1$

Θέτουμε $A=\{t\in\mathbb{R}: t>0 \text{ και } t^n<a\}$

$A\neq\emptyset$ (εφόσον $1\in A$). Το A είναι άνω φραγμένο από το a (για $t>a$ ισχύει $t^n>a^n>a$, άρα $t\notin A$ (συνεπώς το a είναι άνω φράγμα του A)).

διότι $a>1$

Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα (από το αξίωμα πληρότητας) έχει supremum. Θέτουμε $x=\sup A$. Ισχύει ακριβώς μία από τις τρεις $x^n<a$, $x^n=a$, $x^n>a$. Πρέπει να αποκλείσουμε την 1η και 3η

No. Date

Αν $x^n > a$: τότε $1 < \frac{x^n}{a}$ και από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(1+\varepsilon)^n < \frac{x^n}{a}$

Άρα $a < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n$

Εφόσον $\frac{x}{1+\varepsilon} < x = \sup A$
$\exists\, t \in A,\ t > \frac{x}{1+\varepsilon} \Leftrightarrow t^n > \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n$

έτσι $a < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{διότι } t \in A}}{t^n < a}$ άρα $a < a$

<u>ΑΤΟΠΟ</u>

Αν $x^n < a$: τότε $1 < \frac{a}{x^n}$ άρα (από το προηγούμενο λήμμα) υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(1+\varepsilon)^n < \frac{a}{x^n} \Rightarrow$

$x^n (1+\varepsilon)^n < a \Rightarrow (x(1+\varepsilon))^n < a$ (δηλ. $x(1+\varepsilon) \in A$)
άρα $x(1+\varepsilon) \in A$. Όμως $x(1+\varepsilon) > x = \sup A$
<u>Άτοπο</u>

Επομένως $x^n = a$.

<u>2η περίπτωση</u> : $0 < a < 1$

τότε $\frac{1}{a} > 1$

Άρα από 1η περίπτωση $\exists$ ~~[illegible]~~ $y > 0$ ώστε $y^n = \frac{1}{a}$

No. Date

Apa jika $x = \frac{1}{y}$ Exact $x^n = \frac{1}{y^n} = a$.